ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 26 ΜΑΪΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α 1,2 Θεωρία

Β.
1. Λ
2. Σ
3. Λ
4. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. $z_2 = (1-i)^2 + 3i^{2009} + 1$
Είναι: $(1-i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$ και $i^{2009} = i^{2008} \cdot i = i$.
Οπότε: $z_2 = -2i + 3i + 1 = 1 + i$.

β. $\overline{z_1} - z_2 = 2 - 3i - (1+i) = 1 - 4i$, οπότε: $\left|\overline{z_1} - z_2\right| = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$

γ. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2+3i}{1+i} = \dfrac{(2+3i)(1-i)}{1^2+1^2} = \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2}i$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Για $x<1$ είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\alpha x^2 + \beta\right) = \alpha + \beta$, $f(1) = \alpha + \beta$

Για $x>1$ είναι $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(2x+3) = 5$.

Για να είναι συνεχής η f στο $x_0 = 1$, πρέπει:
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \iff \alpha + \beta = 5$$

β. Για $x<1$ είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\left(\alpha x^2+\beta\right) - (\alpha+\beta)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\alpha\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = 2\alpha$.

Για $x>1$ είναι $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x+3-5}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = 2$.

Για να είναι παραγωγίσιμη η f στο $x_0 = 1$, πρέπει:
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$ και να είναι πραγματικός αριθμός,
οπότε $2\alpha = 2 \iff \alpha = 1$, άρα $1 + \beta = 5 \iff \beta = 4$.

γ. Είναι: $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+4}{x}, & x \le 1,\ x \ne 0 \\ \dfrac{2x+3}{x}, & x > 1 \end{cases}$

Είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+4}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1=\lambda$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}(g(x)-\lambda x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(g(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+4-x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x^2}=0=\beta$

Η ευθεία y = x είναι πλάγια ασύπτωτη της C_g στο $-\infty$

Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$.

Η ευθεία y = 2 είναι οριζόντια ασύπτωτη της C_g στο $+\infty$

ΘΕΜΑ 4ο

I. Η f είναι παραγωγίσιμη στο IR ως πολυωνυμική, με $f'(x) = 3x^2 + 2\lambda x - 3$.

Αφού παρουσιάζει τοπ. ακρότατο στο $x_0 = 1$, από Θ. Fermat, είναι:
$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2\lambda - 3 = 0$ οπότε $\lambda = 0$.

II.

α. Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον πίνακα:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	
			τ. μ.		τ. ε.		

Η f είναι γν. αύξουσα στο $(-\infty, -1]$ και στο $[1, \infty)$ και γν. φθίνουσα στο $-[1, 1]$.
Παρουσιάζει τοπ. μέγιστο στο $x_1 = -1$, το $f(-1) = 3$ και τοπ. ελάχιστο στο $x_2 = 1$, το $f(1) = -1$.

β. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στην y = 9x.
Τότε $f'(x_0) = 9 \Rightarrow x_0^2 = 4 \Rightarrow x_0 = -2$ ή $x_0 = 2$.

Είναι: $f(-2) = -1$, οπότε η η εφαπτομένη της C_f στο $M_1(-2, -1)$ είναι:
(ε_1): $y + 1 = 9(x + 2) \Leftrightarrow y = 9x + 17$.

Είναι: $f(2) = 3$, οπότε η η εφαπτομένη της C_f στο $M_2(2, 3)$ είναι:
(ε_1): $y - 3 = 9(x - 2) \Leftrightarrow y = 9x - 15$.

γ. Έστω $g(x) = f(x) - \sqrt{x} = x^3 - 3x + 1 - \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$.
Η g(x) είναι συνεχής στο [0, 1].
$g(0) = 1$, $g(1) = -2$, οπότε $g(0)\cdot g(1) < 0$, άρα από Θ. Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$, ώστε $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(x) - \sqrt{x} = 0$.